Dans l'air :

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=m*\vec{g}\Rightarrow\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{g}¿$$

$\vec{g}$=(0,-g)

Départ avec une vitesse initiale Vx=vo et Vy=0 à t=0 à la hauteur y=H ;

On part avec un peu d'élan

$\frac{dVx}{dt}=0$ => $Vx=cte=vo$ => $\frac{dx}{dt}=vo$ => $x=vo*t+cte=vo*t$

et

$\frac{dVy}{dt}=-g$ => $Vy=-g*t+0=-g*t$ => $\frac{dy}{dt}=-g*t$ => $y=-\frac{1}{2}*g*t^2+cte$

à t=0 x=0 et y=H

$$x=vo*t$$

$$y=-\frac{1}{2}*g*t^2+H$$

expression de la trajectoire y=f(x)

$$t=\frac{x}{vo}$$

$$y=-\frac{1}{2}*g*\frac{x^2}{vo^2}+H$$

Application : H= 3 m vo=5 km/h

$$y=-2{,}539*x^2+3$$

Durée du saut dans l'air :

$y=0\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2*H}{g}}=0{,}792\,s$

Composante suivant 0y de la vitesse : $Vy=-g*t=-\sqrt{2*g*H}$

Vitesse de rentrer dans l'eau V :

$V=\sqrt[□]{1{,}39^2+(-7{,}67)^2}$ V=7,8 m/s soit 28 km/h

Angle de rentrer dans l'eau :

$\beta = \arctan(\frac{vy}{vx}) = -79{,}7°$

Départ avec une vitesse initiale Vx=Vox et Vy=Voy à t=0 à la hauteur y=H ;

Départ en plongeon suivant un angle α avec l'hrizontale

Vox=Vo*cos(α) et Voy=Vo*sin(α)   ou Vo est le module du vecteur vitesse et α l'angle du vecteur vitesse avec Ox au temps t=0

$\frac{dVx}{dt} = 0 \Rightarrow Vx = Vo * \cos(\alpha)$ => $x = Vo * \cos(\alpha) * t$ => =>

et

$\frac{dVy}{dt} = -g$ => $Vy = -g * t + Vo * \sin(\alpha)$ => $\frac{dy}{dt} = -g * t + Vo * \sin(\alpha)$ =>

$y = -\frac{1}{2} * g * t^2 + Vo * \sin(\alpha) * t + H$

On obtient la trajectoire en éliminant t ce qui donne :

$y = -\frac{1}{2} * g * \frac{x^2}{Vo^2 * \cos^2(\alpha)} ¿ + \tan(\alpha) * x + H$

Distance x=D de rentrée dans l'eau est obtenue en résolvant l'équation y=0 ce qui donne :

$$D = \frac{Vo^2 * \sin(2 * \alpha)}{2 * g} * (1 + \sqrt{1 + \frac{2gH}{Vo^2 \sin^2 \alpha}})$$

Application :

α=45 °   Vo=5 km/h =1,39 m/s H=3 m

on obtient D=0,875 m

La trajectoire :

$y = -5{,}08 * x^2 + x + 3$

Temps de rentrer dans l'eau :

$t = \sqrt{\frac{x}{Vo * \cos \alpha}} = 0{,}89\,s$

Vitesse de rentrer dans l'eau :

$Vx = Vo * \cos(\alpha)$=0,983 m/s

$Vy = -g * t + Vo * \sin(\alpha)$=-7,748 m/s

$V = \sqrt[\square]{Vx^2 + Vy^2} = 7{,}81\,m/s$

Calcul de l'angle β avec le plan d'eau de rentrer dans l'eau :

tan(β)=$\frac{Vy}{Vx}$ => β=-82,8 °

Pour une hauteur de saut de 25 m je trouve β=-87,5 °

Dans l’eau :

J’applique toujours le principe fondamental de la dynamique avec une vitesse initiale V1,
Dans l’eau je tiens compte de la poussée d’Archimède et de la force de trainée dans l’eau,
$Fa=\rho*Vl*\vec{g}$
ou ρ= masse volumique de l’eau (kg/m³)
et Vl=volume du corps humain en m³

la force de trainée dans l’eau :

$$Ft=\frac{\rho*S*Cx*\vec{V}^2}{2}$$

On a donc :

$$m*\frac{d\vec{V}}{dt}=m*\vec{g}-\rho*\vec{g}*Vl-\frac{\rho*S*Cx*\vec{V}^2}{2}$$

$$m*\frac{d\vec{V}}{dt}=m*\vec{g}-\rho*\vec{g}*Vl-\frac{\rho*S*Cx*V*\vec{V}}{2}$$

en projetant sur Oy

$$m*\frac{d\vec{V}*\vec{j}}{dt}=m*\vec{g}*\vec{j}-\rho*Vl*\vec{g}*\vec{j}-\frac{\rho*S*Cx*V\,\vec{V}*\vec{j}}{2}$$

ou $\vec{j}$ est le vecteur unitaire dirigé vers la bas

$$m*\frac{dVy}{dt}=m*g-\rho*g*Vl-\frac{\rho*S*Cx*\sqrt{Vx^2+Vy^2}Vy}{2}$$

je note A=$\frac{\rho*S*Cx}{2*m}$ et B=$g-\frac{\rho*g*Vl}{m}$

Dans l’eau on a donc :

$$\frac{dVy}{dt}=B-A*\sqrt{Vx^2+Vy^2}*Vy$$

Considérons le cas Vx=0 qui correspond à une rentrée dans l'eau à 90 ° du plan d'eau,On a vu précédemment que plus la Hauteur du saut est grande plus la valeur de β augmente et se rapproche de 90 °,Le calcul que l'on va faire sera d'autant plus précis que l'on plonge d'une hauteur H élevée, J'applique toujours le principe fondamental de la dynamique avec une vitesse initiale Vy(t=0)=V1,

Résolution de l'équation différentielle $y'=B-A*y^2$

On pose z=$\sqrt{\frac{A}{B}}*y$

On a z'=$\sqrt{\frac{A}{B}}*y'$

$y'=B(1-z^2)$

$z'=\sqrt{A*B}(1-z^2)$

$\frac{z'}{1-z^2}=\sqrt{A*B}$ (eq, 1)

une primitive de $\frac{z'}{1-z^2}$ est : $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|$ + C

$eq.1 \Rightarrow \frac{1}{2}*\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|=\sqrt{A*B}*t-C$

soit $\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|=2\sqrt{A*B}*t-2*C$

$z=\frac{1+\exp(f(t))}{-1+\exp(f(t))}$

avec f(t)=$2*\sqrt{AB}*t-2*C$

Donc la vitesse V=y est égale à :

$$Vy(t)=\sqrt{\frac{B}{A}}*\frac{1+\exp(2*\sqrt{AB}*t-2*C)}{-1+\exp(2*\sqrt{A*B}*t-2*C)}$$

La constante C se détermine avec la condition V(t=0)=V1 à l'entrée dans l'eau je trouve C=$\frac{-1}{2}*\ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{A}{B}}*V1}{-1+\sqrt{\frac{A}{B}}*V1}\right)$

V(t) peut se mettre sous la forme :

$$V(t)=Vt*\frac{1+\exp(2*C)*\exp\left(-\frac{t}{T}\right)}{1-\exp(2*C)*\exp\left(\frac{-t}{T}\right)}=Vt*\frac{1+K*\exp\left(\frac{-t}{T}\right)}{1-K*\exp\left(\frac{-t}{T}\right)}$$

avec K=$\frac{V1-Vt}{V1+Vt}$ et T=$\frac{1}{2*\sqrt{A*B}}$

Vt=$\sqrt{\frac{B}{A}}$.

On peut considérer que le régime permanent est atteint (V ne depend plus de t) au bout d’un temps t=5*T=3,56 s

Calcul de la profondeur y atteinte dans l’eau :

V=$\frac{dy}{dt}$

$y=\int V(t)\,dt$¿

$y=\sqrt{\frac{B}{A}}*\int\frac{1+\exp(a*t+b)}{-1+\exp(a*t+b)}\,dt$ **avec a=**$2*\sqrt{A*B}$ **et b=-2C**

en posant u=exp(a*t+b)

y=$\sqrt{\frac{B}{A}}*\frac{1}{a}*\int\frac{1+u}{u*(-1+u)}*du$

qui se décompose en fraction rationnelle et je trouve :

$$y(t)=\sqrt{\frac{B}{A}}*\left(-t+\frac{2}{a}\ln\left|\exp(a*t+b)-1\right|\right)+cte$$

si on nomme D1 la constante

et si on prend y=0 (surface de l’eau) à t=0 je trouve D1=-$-\sqrt{\frac{B}{A}}*\left(\frac{2}{a}\right)*\ln\left|e^{b}-1\right|$

La profondeur y (t) à partir de la surface peut s'écrire :

$$y(t)=\sqrt{\frac{B}{A}}*(-t+\frac{2}{a}\ln|\exp(a*t+b)-1|)+D1$$

avec D1= $(\frac{-1}{A})*\ln\frac{2}{-1+\sqrt{\frac{A}{B}}*V1}$ si on prend y=0 à t=0

b=-2*C=ln $\left(\frac{1+\sqrt{\frac{A}{B}}*V1}{-1+\sqrt{\frac{A}{B}}*V1}\right)$

et

a=$2*\sqrt{A*B}$

Vitesse limite :

$$\lim_{t\to\infty} V(t)=Vt=\sqrt{\frac{B}{A}}$$

Application pour une hauteur de plongeon H=10 m

données utilisées :

g=9,81   ρ =1000 kg/m³

Plongeur :

m=80 kg S=0,18 m² Cx=0,7   Vl=75 litres (données relevées sur internet)

on calcule :

A=0,787   B=0,625

C=-0,064   D1=2,53

a=1,4   b=0,127

On obtient :

V(t)=0,89*$\frac{\exp(1,4*t+0,127)+1}{\exp(1,4*t+0,127)-1}$

h(t)=y(t)=-0,89*t+1,271*ln$|1,135*e^{1,4*t}-1|+2,53$

la vitesse limite est égale à 0,89 m/s

On peut expliciter aussi la profondeur h(t) en fonction de V1 ,

$$h(t)=-\sqrt{\frac{B}{A}}*t+\frac{1}{A}*\ln\left|\frac{-1+\sqrt{\frac{A}{B}}*V1}{2}*(\exp(2\sqrt{A*B}*t-2*C)-1)\right|¿$$

$$h(t)=-Vt*t+\frac{1}{A}*\ln\vee\frac{-1+\frac{V1}{Vt}}{2*K}*\exp(\frac{t}{T})-K=-Vt*t+\frac{1}{A}*\ln(\frac{V1+Vt}{2*Vt}*(\exp(\frac{t}{T})-K))$$

A=$\frac{\rho*S*Cx}{2*m}$ et B=$g-\frac{\rho*g*Vl}{m}$ -2C=$\ln(\frac{1+\sqrt{\frac{A}{B}}*V1}{-1+\sqrt{\frac{A}{B}}*V1})$